P.C.A.
PETITS CALCULS AMUSANTS

ou pour ceux qui préfèrent (à tort) : *Maths pour la physique*

Isabelle SAILLOT

mars 2015

CALCUL DU VOLUME D'UNE SPHÈRE PAR LA PLUS MAUVAISE MÉTHODE,

POUR QUE CE SOIT PLUS LONG ET QU'ON S'AMUSE MIEUX

Pour bien nous amuser aujourd'hui, je vous propose de (tenter de) calculer le volume d'une sphère par la méthode la plus stupide possible, c'est-à-dire en coordonnées cartésiennes. Rappelons que les coordonnées adaptées à ce calcul sont bien entendu les coordonnées sphériques, qui, comme leur nom l'indique, ramènent l'opération à une ligne et demie en comptant le schéma, soit environ 17 secondes pour les moins entraînés.
Ici au contraire, nous aurons le plaisir de noircir deux pages de calculs inutiles et d'y passer 15 bonnes minutes. Quel bonheur ! C'est parti.

Comme nous sommes dans l'espace, il va nous falloir intégrer quelque chose comme :

$$I = \iiint_{?}^{??} dx.dy.dz$$

Heureusement nous nous souvenons qu'en coordonnées cartésiennes l'équation du cercle est :
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Par conséquent on peut toujours espérer passer de 3 à 2 variables en exprimant z en fonction de x et y :
$z^2 = R^2 - (x^2 + y^2)$, soit $-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

Si on s'entête absolument à garder x et y comme variables indépendantes, alors z va varier de $-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ à $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ selon les variations propres de x et y.

Du coup notre intégrale devient :

$$I = \iiint_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx.dy.dz$$

C'est vraiment très moche mais je vous avais prévenus.
Séparons la variable z des deux autres :

$$I = \iint dx.dy \int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dz$$

Intégrons sur z ; comme les 2 bornes sont juste opposées, ceci se simplifie un peu et nous obtenons :

$$\boxed{I = 2\iint \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,.dx.dy}\ **$$

** je rappelle que $\int_{-a}^{+a} dz = 2a$

Voilà voilà. Nous avons fait environ 1/3 de ce calcul fastidieux et inutile.
Maintenant que nous sommes dans le plan, nous allons tout de même nous simplifier un peu la vie en passant en coordonnées polaires : $x = r.\cos t$; $y = r.\sin t$

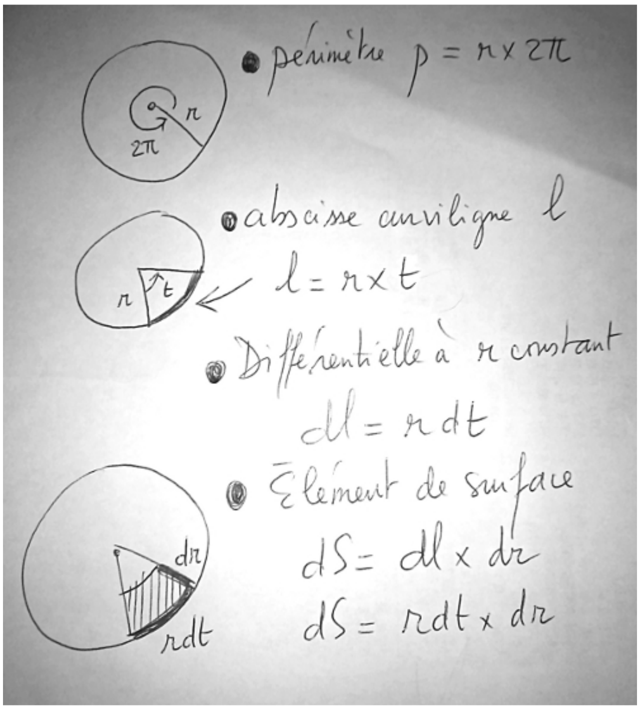
Par conséquent nous avons :
$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$ (car $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

Mais que valent donc *dx* et *dy* ??

Deux méthodes, une stupide et une très bien (choisissez) :

1// méthode stupide : vous avez appris par cœur que l'élément de surface en coordonnées polaire est *r.dr.dt.* Va bene !

2// méthode très bien : vous savez retrouver graphiquement les éléments de surface, et vous décidez d'occuper intelligemment la minute qui suit en refaisant le raisonnement :



Notre *dx.dy* devient donc :

$$\boxed{dx.dy = r.dr.dt}$$

Il est possible, maintenant, d'exprimer l'intégrale de volume sous une forme plus aboutie :

$$I = 2\iint \sqrt{R^2 - r^2}.r.dr.dt$$

Mais encore faut-il savoir intégrer ceci !
En révisant le cours de Terminale, on reconnaît une forme $n.u^{n-1}.u'$ qui donnera u comme intégrale ;
et plus précisément la dérivée de $u = (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$ qui vaut $-3\sqrt{R^2 - r^2}.r$

I peut donc s'écrire $I = -\frac{2}{3}\iint(-3.\sqrt{R^2 - r^2}).r.dr.dt$

Incroyable mais vrai… il ne reste plus qu'à séparer les variables en précisant les bornes !

$$I = -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} dt \int_0^R (-3\sqrt{R^2 - r^2}).r.dr$$

Il vient alors :

$$I = -\frac{2}{3}.2\pi.\left[(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = -\frac{4\pi}{3}.\left[0 - (R^2)^{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{4\pi}{3}.\ (-R^3)$$

Soit $\boxed{I = \frac{4}{3}.\pi.R^3}$!!

Vous avez trouvé ça horrible ? BRAVO ! Votre intuition ne vous a pas trompés.

MORALITÉ :

N'UTILISEZ JAMAIS LES COORDONNÉES CARTÉSIENNES POUR INTÉGRER SUR DES SYMÉTRIES CYLINDRIQUES OU SPHÉRIQUES !